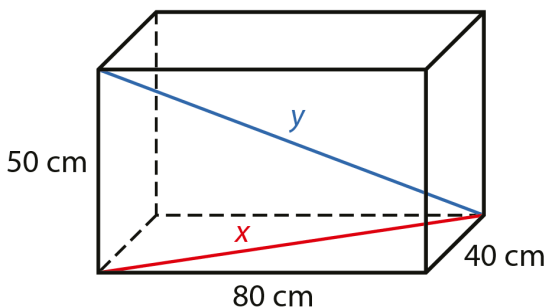


12.1



- a) Lasketaan pohjatahkoon lävistäjän pituus.

$$x^2 = 80^2 + 40^2$$

$$x^2 = 8000$$

$$x = \sqrt{8000} \approx 89 \text{ tai } x = -\sqrt{8000} \approx -89$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 89$ cm.

- b) Lasketaan avaruuslävistäjän pituus.

$$y^2 = 80^2 + 40^2 + 50^2$$

$$y^2 = 10500$$

$$y = \sqrt{10500} \approx 100 \text{ tai } y = -\sqrt{10500} \approx -100$$

Pituus on positiivinen luku, joten $y \approx 100$ cm.

Vastaus

a) 89 cm

b) 100 cm

12.2

- a) Suorakulmaisen särmiön tilavuus 216 cm^3 .

Ratkaistaan särmiön pituus x .

$$x \cdot x \cdot 8,0 = 216$$

$$x^2 \cdot 8,0 = 216 \quad | :8,0$$

$$x^2 = 27$$

$$x = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ tai } x = -\sqrt{27} \approx -5,2$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 5,2 \text{ cm}$.

- b) Ratkaistaan särmiön pituus x .

$$x^3 = 216$$

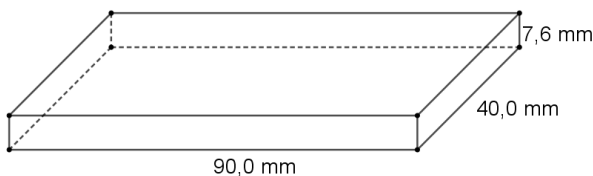
$$x = \sqrt[3]{216} = 6,0 \text{ (cm)}$$

Vastaus

a) $5,2 \text{ cm}$

b) $6,0 \text{ cm}$

12.3



Tutkitaan, onko harkon tiheys yhtä suuri kuin kullan tiheys.
Lasketaan harkon tilavuus.

$$V = 90,0 \cdot 40,0 \cdot 7,6 = 27\,360 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiometreinä.

$$\begin{aligned} 27\,360 \text{ mm}^3 & \qquad \qquad \qquad 1\,000\,000\,000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ m}^3 \\ &= 0,000027360 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan harkon tiheys.

$$\begin{aligned} & \frac{500,0 \text{ g}}{0,00002736 \text{ m}^3} & \text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}} \\ &= \frac{0,5000 \text{ kg}}{0,00002736 \text{ m}^3} \\ &\approx 18\,300 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Harkko ei ole puhdasta kultaa, koska sen tiheys on eri suuri kuin kullan tiheys $19\,320 \text{ kg/m}^3$.

Vastaus

Ei ole.

12.4

- a) Oletetaan laatikon olevan suorakulmaisen särmiön muotoinen.

Laatikon seinämän paksuus on 8,0 cm . Lasketaan laatikon sisämitat.

$$\text{Pituus } 80 - 2 \cdot 8 = 64 \text{ (cm)}$$

$$\text{Leveys } 60 - 2 \cdot 8 = 44 \text{ (cm)}$$

$$\text{Korkeus } 40 - 2 \cdot 8 = 24 \text{ (cm)}$$

Lasketaan laatikon vetoisuus.

$$V = abc$$

$$\text{Sijoitetaan } a = 64, b = 44 \text{ ja } c = 24.$$

$$= 64 \cdot 44 \cdot 24$$

$$= 67\,584 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan vetoisuus litroina.

$$= 67\,584 \text{ cm}^3$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$$

$$= 67,584 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

$$= 67,584 \text{ L}$$

$$\approx 68 \text{ L}$$

- b) Laatikon seinämien tilavuus on tilavuuden ulkomitan ja sisämitan erotus.

$$80 \cdot 60 \cdot 40 - 64 \cdot 44 \cdot 24 = 124\,416 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiodesimetreinä.

$$= 124\,416 \text{ cm}^3$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$$

$$= 124,416 \text{ dm}^3$$

Lasketaan laatikon massa.

$$21 \text{ g/dm}^3 \cdot 124,416 \text{ dm}^3$$

$$\text{massa} = \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus}$$

$$= 2612,736 \text{ g}$$

$$\approx 2,6 \text{ kg}$$

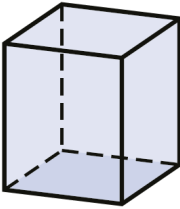
Vastaus

a) 68 L

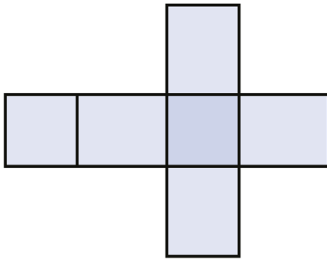
b) 2,6 kg

12.5

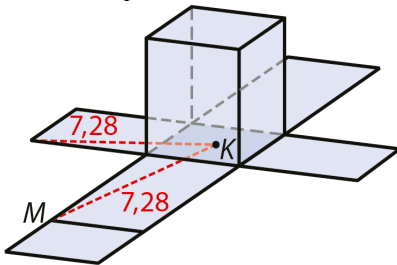
- a) Piirretään 2D-piirtoalueessa pohjatahkoksi neliö, joka sivun pituus on 4. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa neliö särmiöksi, jonka korkeus on 5.



- b) Tehdään 3D-piirtoalueessa särmiön tasolevitys.



- c) Piirretään lyhin reitti. Reitti on yhtä pitkä kumpaakin vaihtoehtoista sivutahkoa pitkin.



- d) Lasketaan reitin pituus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$MK^2 = 7^2 + 2^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$MK = \sqrt{53} \approx 7,3 \text{ tai } MK = -\sqrt{53} \approx -7,3$$

Pituus on positiivinen luku, joten $MK = \sqrt{53} \approx 7,3$.

Vastaus

- d) $\sqrt{53} \approx 7,3$

12.6

- a) Laatikon pohjalle mahtuu laatikon pohjan lävistäjän mittainen sukkapuikko. Lasketaan pohjan lävistäjän pituus d Pythagoraan lauseella.

$$d^2 = 11,5^2 + 9,0^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$d \approx -14,6 \text{ tai } d \approx 14,6$$

Pituus on positiivinen luku, joten $d \approx 14,6 \text{ cm}$.

- b) Laatikkoon mahtuu laatikon avaruuslävistäjän mittainen sukkapuikko. Lasketaan avaruuslävistäjän pituus x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 11,5^2 + 9,0^2 + 6,3^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx -15,9 \text{ tai } x \approx 15,9$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 15,9 \text{ cm}$.

Vastaus

a) 14,6 cm

b) 15,9 cm

12.7

a) Lasketaan laatikon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= abc \\ &= 75 \cdot 60 \cdot 40 \\ &= 180\,000 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$180\,000 \text{ cm}^3 = 180 \text{ dm}^3 = 180 \text{ L}$$

b) Lasketaan laatikon särmien kokonaispituus. Samanmittaisia särmiä on neljä kutakin.

$$4 \cdot (75 + 60 + 40) = 700 \text{ (cm)}$$

Metallinauhaa tarvitaan 700 cm.

Vastaus

a) 180 L

b) 700 cm

12.8

Merkitään pohjaneliön särmän pituutta kirjaimella x .
Pakkauksen korkeus on $4x$.

Ilmaistaan tilavuus kuutiosenttimetreinä.

$$1\text{L} = 1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$1000 = x \cdot x \cdot 4x$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$x \approx 6,3 \text{ (cm)}$$

Lasketaan $4x$.

$$4x \approx 4 \cdot 6,3 = 25,2 \text{ (cm)}$$

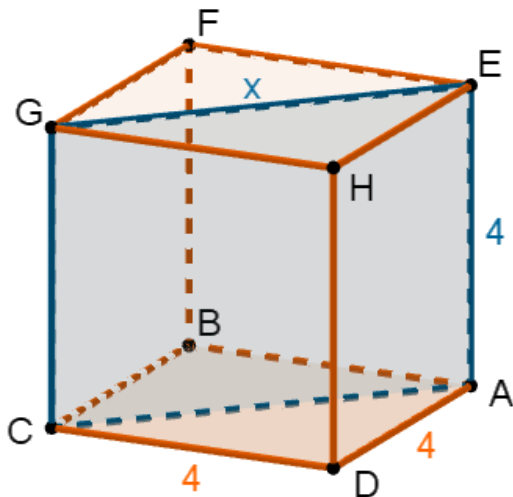
Pakkauksen pituus on 6,3 cm, leveys 6,3 cm ja korkeus 25,2 cm.

Vastaus

pituus 6,3 cm, leveys 6,3 cm ja korkeus 25,2 cm

12.9

a) Piirretään kuva geometriaohjelmalla.



Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka korkeus on 4,0 cm. Lasketaan suorakulmion leveys x Pythagoraan lauseella.

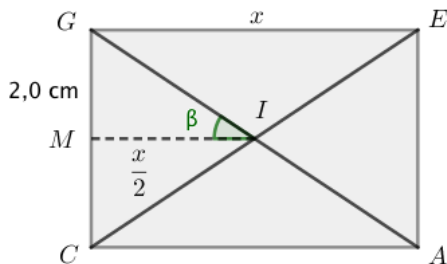
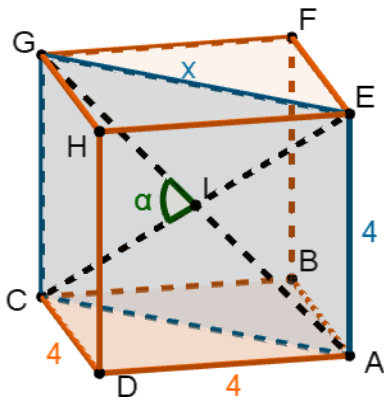
$$x^2 = 4^2 + 4^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx -5,6569 \text{ tai } x \approx 5,6569$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 5,7$ cm .

b) Piirretään avaruuslävistäjien välinen kulma.



Kolmio GIM on suorakulmainen. Lasketaan kateetin MI pituus.

$$\frac{x}{2} \approx \frac{5,6569}{2} \approx 2,8284 \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan kulman β suuruus.

$$\tan \beta = \frac{2,0}{2,8284}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{2,0}{2,8284}\right) \approx 35,264^\circ$$

Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 2\beta \approx 2 \cdot 35,264^\circ \approx 71^\circ$$

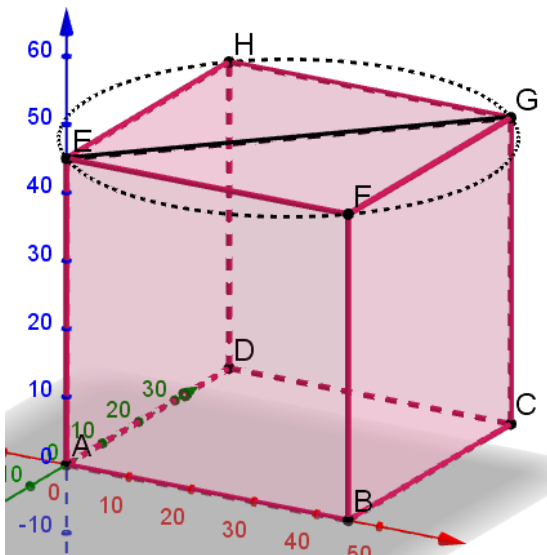
Vastaus

a) Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 4,0 cm ja 5,7 cm.

b) 71°

12.10

- a) Kun köysi on kiinnitetty tahkon keskipisteeseen, kuution levein kohta on tahkon lävistäjä.



Ratkaistaan lävistäjän pituus Pythagoraan lauseella.

$$EG^2 = 45^2 + 45^2$$

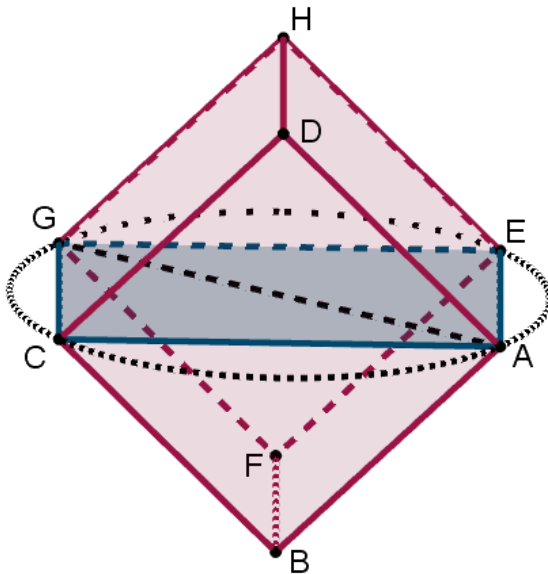
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$EG \approx 64 \text{ tai } EG \approx -64$$

Pituus on positiivinen luku, joten $EG \approx 64$ cm.

Reiän halkaisijan tulee olla vähintään 64 cm.

- b) Kun köysi on kiinnitetty särmän keskipisteeseen, kuution levein kohta on sen avaruuslävistäjä.



Ratkaistaan avaruuslävistäjän pituus Pythagoraan lauseella.

$$AG^2 = 45^2 + 45^2 + 45^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$AG \approx 78 \text{ tai } AG \approx -78$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AG \approx 78$ cm.

Reiän halkaisijan tulee olla vähintään 78 cm.

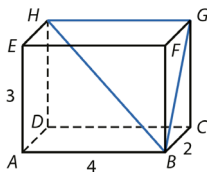
Vastaus

reiän halkaisija vähintään

a) 64 cm

b) 78 cm

12.11



- a) Kolmio BCG on suorakulmainen. Lasketaan sivun BG pituus.

$$BG^2 = 2^2 + 3^2$$

$$BG^2 = 13$$

$$BG = \sqrt{13} \approx 3,6 \text{ tai } x = -\sqrt{13} \approx -3,6$$

Pituus on positiivinen luku, joten $BG = \sqrt{13} \approx 3,6$.

Lasketaan avaruuslävistäjän pituus.

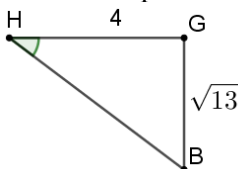
$$BH^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2$$

$$BH^2 = 29$$

$$BH = \sqrt{29} \approx 5,4 \text{ tai } BH = -\sqrt{29} \approx -5,4$$

Pituus on positiivinen luku, joten $BH = \sqrt{29} \approx 5,4$.

Sivun GH pituus on 4,0.



- b) Kolmio BGH on suorakulmainen. Kulman G suuruus on 90° . Merkitään kulman H suuruutta kirjaimella α .

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{13}}{4} \right)$$

$$\alpha \approx 42^\circ$$

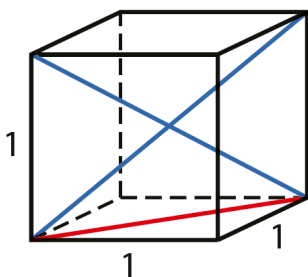
Kulman B suuruus on

$$180^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ.$$

Vastaus

- a) $BG \approx 3,6$, $GH = 4,0$ ja $BH \approx 5,4$
 b) $\sphericalangle B = 48^\circ$, $\sphericalangle G = 90^\circ$ ja $\sphericalangle H = 42^\circ$

12.12



- a) Lasketaan pohjatahkon lävistäjän pituus x .

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = \sqrt{2}$.

- b) Lasketaan avaruuslävistäjän pituus y .

$$y^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \sqrt{3} \text{ tai } y = -\sqrt{3}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $y = \sqrt{3}$.

Vastaus

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

12.13

a) Kuutiossa on 12 särmää. Yhden särmän pituus on $\frac{168 \text{ cm}}{12} = 14 \text{ cm}$.

b) Lasketaan kuution tilavuus.

$$V = 14^3 = 2744 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiodesimetreinä.

$$2744 \text{ cm}^3 = 2,744 \text{ dm}^3 \approx 2,74 \text{ dm}^3$$

c) Kuutiossa on kuusi tahkoa. Lasketaan kuution pinta-ala.

$$A = 6 \cdot 14 \cdot 14 = 1176 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Ilmaistaan pinta-ala neliödesimetreinä.

$$1176 \text{ cm}^2 = 11,76 \text{ dm}^2 \approx 11,8 \text{ dm}^2$$

Vastaus

a) 14 cm

b) $2,74 \text{ cm}^3$

c) $11,8 \text{ dm}^2$

12.14

- a) Oletetaan kassakaapin olevan suorakulmaisen särmiön muotoinen.

Lasketaan kassakaapin sisämitat.

$$\text{Pituus: } 350 - 2 \cdot 8,0 = 334 \text{ (mm)}$$

$$\text{Leveys: } 250 - 2 \cdot 8,0 = 234 \text{ (mm)}$$

$$\text{Korkeus: } 190 - 2 \cdot 8,0 = 174 \text{ (mm)}$$

Lasketaan kassakaapin vetoisuus (eli sisätilavuus).

$$V_s = 334 \cdot 234 \cdot 174 = 13\,599\,144 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan vetoisuus litroina.

$$13\,599\,144 \text{ mm}^3 \qquad 1\,000\,000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$$

$$= 13,599\,144 \text{ L}$$

$$\approx 14 \text{ L}$$

- b) Kassakaapin seinämien tilavuus on ulkotilavuuden ja sisätilavuuden erotus.

$$V_m = 350 \cdot 250 \cdot 190 - 13\,599\,144 = 3\,025\,856 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus kuutiometreinä.

$$3\,025\,856 \text{ mm}^3 \qquad 1\,000\,000\,000 \text{ mm}^3 = 1 \text{ m}^3$$

$$= 0,003\,025\,856 \text{ m}^3$$

Lasketaan kassakaapin seinämien massa.

$$7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,003\,025\,856 \text{ m}^3 \qquad \text{massa} = \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus}$$

$$\approx 24 \text{ kg}$$

Vastaus

a) 14 L

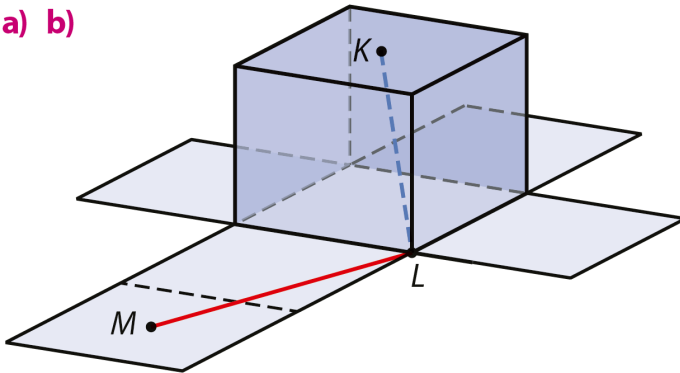
b) 24 kg

12.15

Piirretään 2D-piirtoalueessa pohjatahkoksi neliö, joka sivun pituus on 30. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa neliö särmiöksi, jonka korkeus on 20.

Tehdään 3D-piirtoalueessa särmiön tasolevitys.

a) b)



- c) Lyhin lentoreitti on jana KL . Mittaamalla saadaan $KL \approx 29$.
Lentomatkan pituus voidaan myös laskea Pythagoraan lauseella.
 $KL^2 = 15^2 + 15^2 + 20^2$ [Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)
 $KL \approx 29$ tai $KL \approx -29$
Pituus on positiivinen luku, joten $KL \approx 29$.
- d) Lyhin kävelyreitti on jana ML . Mittaamalla saadaan $ML \approx 38$.
Kävelymatkan pituus voidaan myös laskea Pythagoraan lauseella.
 $ML^2 = 15^2 + 30^2$ [Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)
 $ML \approx 38$ tai $ML \approx -38$
Pituus on positiivinen luku, joten $ML \approx 38$.

Vastaus

- c) lentomatkan pituus 29
d) kävelymatkan pituus 38

12.16

Kuution tilavuus on $2,00\text{ m}^3$. Ratkaistaan kuution särmän pituus x .

$$2,00 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{2,00}$$

$$\approx 1,25992 \text{ (m)}$$

Lasketaan kuution pinta-ala.

$$A = 6x^2$$

$$\approx 6 \cdot 1,25992^2$$

$$\approx 9,52 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus

$$9,52 \text{ m}^2$$

12.17

Laatikon pienimmän tahkon leveys on 10,0 cm ja pituus 15,0 cm. Laatikko mahtuu aukosta, jos aukon halkaisija on vähintään yhtä pitkä kuin tahkon lävistäjä.

Lasketaan lävistäjän pituus d Pythagoraan lauseella.

$$d^2 = 10,0^2 + 15,0^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$d \approx -18,03 \text{ tai } d \approx 18,03$$

Pituus on positiivinen luku, joten $d \approx 18,03$ cm .

Pyöristetään halkaisijan arvo ylöspäin, jotta särmiö mahtuu aukosta. Halkaisijan täytyy olla 18,1 cm.

Vastaus

18,1 cm

12.18

Merkitään mehupakkauksen särmien pituuksia $2x$, $3x$ ja $4x$.

Ilmaistaan pakkauksen tilavuus kuutiosenttimetreinä.

$$2 \text{ dl} = 0,2 \text{ L} = 0,2 \text{ dm}^3 = 200 \text{ cm}^3$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$2x \cdot 3x \cdot 4x = 200$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 2,0274 \text{ (cm)}$$

Lasketaan särmien pituudet.

$$2x \approx 2 \cdot 2,0274 \text{ cm} \approx 4,1 \text{ cm}$$

$$3x \approx 3 \cdot 2,0274 \text{ cm} \approx 6,1 \text{ cm}$$

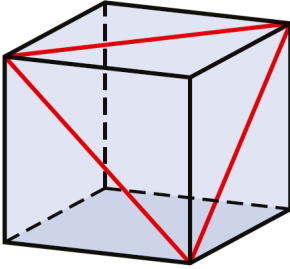
$$4x \approx 4 \cdot 2,0274 \text{ cm} \approx 8,1 \text{ cm}$$

Vastaus

4,1 cm; 6,1 cm ja 8,1 cm

12.19

- a) Piirretään 2D-piirtoalueessa pohjatahkoksi neliö, joka sivun pituus on 6. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa neliö särmiöksi, jonka korkeus on 6.



- b) Piirretään kolmio ja mitataan sen kulmat.
Jokaisen kulman suuruus on 60° .
- c) Kolmion jokainen sivu on kuution tahkon lävistäjä. Siten sivut ovat yhtä pitkät ja kolmio on tasasivuinen.

Lasketaan sivun pituus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 6^2 + 6^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 6\sqrt{2} \text{ tai } x = -6\sqrt{2}$$

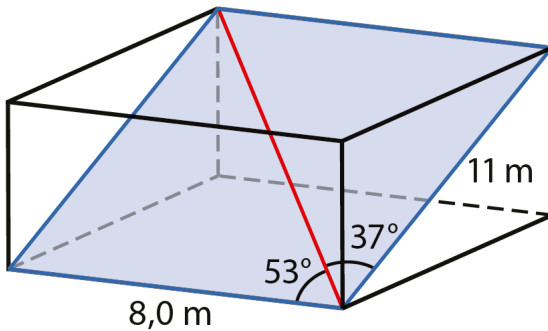
Pituus on positiivinen luku, joten $x = 6\sqrt{2}$.

Vastaus

- b) Jokaisen kulman suuruus on 60° .
- c) Jokaisen sivun pituus on $6\sqrt{2}$. Kolmio on tasasivuinen.

12.20

a) Piirretään kuvio.



Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka pituus on 8,0 m.
Lasketaan suorakulmion leveys x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 4,0^2 + 10,0^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx -10,7703 \text{ tai } x \approx 10,7703$$

Leveys on positiivinen luku, joten $x \approx 11,0 \text{ m}$.

b) Ratkaistaan avaruuslävistäjän (kuvassa punainen) ja päätyseinän lattialistan (kuvassa sininen) välisen kulman α suuruus.

$$\tan \alpha = \frac{10,7703}{8,0}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10,7703}{8,0}\right) \approx 53^\circ$$

c) Lasketaan avaruuslävistäjän ja sivuseinän lävistäjän välisen kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

Vastaus

a) 8,0 m ja 11 m

b) 53°

c) 37°